心理科学进展 2022, Vol. 30, No. 12, 2777–2788
Advances in Psychological Science
https://doi.org/10.3724/SP.J.1042.2022.02777

运算动量效应的理论解释及其发展性预测因素*

张 雯[1,2,3] 董亓易如[1] 龚丽娟[1] 尚 琪[1] 程 琛[4,5] 丁雪辰[1,6]

([1]上海师范大学心理学系，上海 200234) ([2]中国科学院行为科学重点实验室(中国科学院心理研究所)，北京 100101) ([3]中国科学院大学心理学系，北京 100049) ([4]波士顿大学心理与脑科学系，波士顿 02460) ([5]香港科技大学社会科学部，香港 999077) ([6]上海市中小学在线教育研究基地，上海 200234)

摘 要 了解运算偏差的形成与发展对探索算数运算系统的内在机制具有重要意义，早期的算数运算能力是儿童理解和进行复杂数学运算的基础。运算动量偏差是指个体在进行基本数学运算时倾向于高估加法运算结果而低估减法运算结果的一种运算偏差，主要包括三种理论解释，即注意转移假说、启发式解释和压缩解释。鉴于运算动量效应在成年群体中相对稳定却在不同发展阶段儿童中存在不一致的证据，数学能力的提高与空间注意的成熟可结合不同的理论解释来阐明儿童发展过程中运算动量效应的变化趋势。未来可以进一步整合多种研究任务以揭示运算动量效应的发展轨迹，考察数量表征系统与运算动量效应间的关联，探究运算动量效应在不同运算符号中的稳定性，探讨不同因素共同作用对运算动量效应的影响，并设计有关数学能力的干预措施以减少运算动量效应这一运算偏差。

关键词 运算动量效应，注意转移假说，启发式解释，压缩解释
分类号 B849: G44

1 引言

尽管复杂的数学运算并非人们日常生活中的必需品，但基本的数学运算却是日常生活不可分割的一部分。例如，人们常常会根据商品中所含的不同产品数量及其总价来判断其性价比，在结账时通过比较排队的顾客人数及顾客购物车里的商品数量来选择等待时间最短的窗口。这种近似运算(approximate arithmetic)的能力并不局限于成人，即使是婴儿也可以粗略地对一组客体的数量进行表征，并进行加减法等基本运算(李红霞 等, 2015; 梁笑 等, 2021; Barth et al., 2006; Cantlon & Brannon, 2007; McCrink & Wynn, 2004, 2009)，因此近似运算被认为是一种基本的数学技能(Barth et al., 2005; Feigenson et al., 2004; Gilmore et al., 2007; Spelke, 2017)。有趣的是，当个体对两组数量进行加减法的基本运算时，运算符号会影响运算结果的偏差方向，且相加或相减时的运算偏差与运算符号对应的移动方向一致，即高估加法结果而低估减法结果，这种运算偏差被称为运算动量效应(operational momentum; McCrink et al., 2007)。其名称的由来借鉴了过往研究中对表征动量(representational momentum)的命名，即个体对运动刺激最终位置的表征沿着运动方向发生偏移的现象(Freyd & Finke, 1984; Hubbard, 2014, 2015)。

运算动量效应作为运算偏差领域中的重要发现之一，最早由 McCrink 等人(2007)采用非符号视觉集的加减法运算实验在成人样本中发现。该研究要求参与者对屏幕上接连出现的两组点阵进行加法或减法运算，并判断屏幕中央一组新出现的比较点阵是否为前两组点阵的运算结果。其中，研究者选取了 5 种数量类型作为比较点阵并进行测试，分别为较小、稍小、相等、稍大和较大于正确运算结果的比较点阵数量。结果发现，在进行加法运算时，参与者更倾向于认为比运算结果稍大的点阵是正确的运算结果，而在减法运算时

收稿日期：2021-12-13
* 国家自然科学基金青年项目(32000756)，上海市教育委员会科研创新计划重大项目(2019-01-07-00-02-E00005)，上海师范大学学术创新团队建设计划。
通信作者：丁雪辰, E-mail: dingxuechen_psy@163.com; 程琛, E-mail: ccheng10@bu.edu

则更容易认为比运算结果稍小的点阵是正确的运算结果。近年来，研究者们开始关注于运算动量效应这一运算偏差并探讨其背后的理论解释及其预测因素，并从不同角度发现了运算动量效应的相对稳定性。例如，从符号/非符号的不同运算任务出发，研究者在符号(阿拉伯数字)运算和非符号(点阵)运算中均发现了运算动量效应的存在(Haman & Lipowska, 2021; Katz & Knops, 2014; Knops, Viarouge, & Dehaene, 2009; McCrink et al., 2007; Pinhas & Fischer, 2008)；从运算种类出发，有研究进一步考察成人在符号(阿拉伯数字)和非符号(点阵)运算任务中进行乘法和除法运算时的运算偏差，结果发现在非符号估计任务中有显著的运算偏差，表现为高估乘法运算结果而低估除法运算结果(Katz & Knops, 2014)，这说明运算动量效应在不同运算类型和任务中具有相对稳定性；从信息处理的模式出发，研究发现成人在对时间序列进行运算时会出现高估相加后的持续时间而低估相减后的持续时间，这证实运算动量效应不仅存在于对视觉空间信息的处理中，同时也存在于对时间序列信息的处理中，因此算数运算似乎存在着一种共通的计算原理(Bonato et al., 2021)。

需注意的是，虽然运算动量效应在成人研究中已有较为一致的实证依据(Dunn et al., 2019; McCrink & Hubbard, 2017; McCrink et al., 2007)，但不同年龄阶段儿童所表现出的运算动量效应并不一致(Cassia et al., 2016, 2017; Haman & Lipowska, 2021; Knops et al., 2013; McCrink & Wynn, 2004, 2009; Pinheiro-Chagas et al., 2018)。就目前而言，运算动量效应何时出现，其效应强度随年龄增长的发展方向(增强还是减弱)仍然未知。基于此，本文拟对近年来与运算动量效应相关的研究进行梳理，归纳运算动量效应形成的不同理论解释，并在此基础上结合发展研究证据探讨在儿童发展过程中运算动量效应的预测因素，由此为理解儿童运算动量效应的内在形成机制以及更好地认识儿童的算数运算加工提供一定的理论和实践启示。

2 运算动量效应形成的理论解释

运算动量效应的形成一直是近似运算偏差领域中的重要研究主题。目前有关运算动量效应形成的理论解释主要为三种：注意转移假说(attentional shift account)、启发式解释(heuristic account)和压缩解释(compression account) (McCrink et al., 2007)，分别基于个体的空间注意在心理数字线上的移动，个体对运算逻辑直觉的使用以及个体内部对输入数值进行不恰当对数表征解压所实现(Dunn et al., 2019; Knops, Thirion et al., 2009; Knops et al., 2013; McCrink et al., 2007; McCrink & Hubbard, 2017; McCrink & Wynn, 2009)。这三种理论解释的区别主要与是否调用空间数字关联以及对数量进行加工的深浅程度有关，但同时这三种理论解释之间也并非完全相互对立，运算动量效应也可表现为多种机制共同作用的结果。

2.1 注意转移假说(attentional shift account)

注意转移假说是在有关运算动量效应形成的研究领域中最为认可的理论解释机制，该假说认为不同种类运算中出现的运算偏差主要是由空间注意在心理数字线上的移动偏差所造成的。心理数字线(mental number line)指的是数字的大小表征在一条从左到右从小到大的心理线上，且数字大小与其空间位置相对应，即左侧表征小数而右侧表征大数(Dehaene, 1992; Dehaene et al., 1993)。根据注意转移假说，当注意焦点(即个体将其心理资源集中注意至某一方面)在操作方向上沿着心理数字线移动得太远时，会使个体将空间注意转移至心理数字线上表征正确结果的右边(加法)和左边(减法)，从而导致运算偏差，即加法运算时表征为比正确结果更大的数字，而减法运算时则表征为比正确结果更小的数字(Knops, Viarouge, & Dehaene, 2009; Knops et al., 2013; McCrink et al., 2007)。

这种机制下具体的运算表征过程表现为，在进行运算估计时，个体会先将运算中的第一个数字映射到心理数字线上，随后根据运算符号，注意焦点通过对应于第二个数字大小的距离，而从当前位置(即与第一个数字大小对应的点)转移到另一个新的位置(即与结果大小对应的点)。当进行心算时，个体通常会在心理数字线上沿着运算结果的方向而在心理表征上产生正向位移，在加法和乘法时趋向于大数，而在减法和除法时则趋向于小数，进而出现运算动量效应(Katz & Knops, 2014; McCrink et al., 2007)。已有研究发现，数字运算中可能会出现明显的左/右方向的注意转移(Liu et al., 2017; Masson & Pesenti, 2016; Masson et al., 2018; Zhu et al., 2018; Zhu et al., 2019)。当

参与者被要求在屏幕上的 7 个选项中选择正确运算结果时，不仅在加法题中选择的数字较大而在减法题中选择的数字较小，且参与者的选择也受到刺激材料所出现的空间位置的影响，即在减法题中倾向于选择左上方的选项，而在加法题中则倾向于选择右上方的结果选项，这说明近似运算可能涉及到对数字空间组织进行心理表征的动态变化(Knops, Viarouge, & Dehaene, 2009)。不仅如此，另一项研究也发现，观察中央呈现的加法问题时所激活的神经活动与右眼扫视所激活的神经活动相一致，这表明在进行加法运算时个体更易将注意力转移到心理数字线的右侧(Knops, Thirion et al., 2009)。因此，该假说认为运算动量效应是由注意转移中的偏差所导致的，即注意焦点在运算方向上沿着心理数字线移动得太远，因而分别对加法和减法的结果产生高估和低估偏差。

近年来的研究结果多支持注意转移假说。例如 Jang 和 Cho (2022)的研究发现，运算动量效应与符号运算能力之间存在显著正相关，因此更强的运算动量效应可能反映了更有效的数学运算基础知识的应用以及更加成熟的注意力系统，这些都与注意转移假说所强调的内容是相一致的；同样地，Pinheiro-Chagas 等人(2018)在 9~12 岁的学龄儿童中发现运算动量效应随年龄增加，并认为这与“空间—数字的反应编码联合”效应有关，即 SNARC 效应(spatial-numerical association of response codes)。该效应强调空间位置对数值处理的影响，也被认为与个体的工作记忆以及数字正负性的呈现有关(戴隆农，潘运，2021；潘运 等，2019)。然而，尽管研究结果证明运算动量效应与数值处理和空间注意有关，但个体将数值映射到空间仍可能是一个复杂过程(Dunn et al., 2019; Haman & Lipowska, 2021)，因此通过实证研究结果来验证形成运算动量效应背后的空间注意过程是尤为重要的。此外，根据注意转移假说，运算动量映射在空间上的方向具有一定灵活性，可随心理数字线方向的变化而变化。例如，有研究发现通过操纵数字线方向(从左到右 vs. 从右到左)，运算动量效应表现为加法与空间偏向于相对较大数字的一边相关联，减法则相反，而不是固定的“加法与右侧空间相关，减法与左侧空间相关”(Klein et al., 2014)。也就是说，运算动量效应实际上与数字当前(短期)的位置有关，而不是习惯性(长期)的位置(Pinhas et al., 2015)。

2.2　启发式解释(heuristic account)

作为运算动量效应形成的理论解释之一，启发式解释强调了个体对运算逻辑直觉的使用，即加法对应“更多”，减法对应“更少”。启发式最初主要用于解释在婴儿身上发现的运算动量效应，该解释认为婴儿采用了一种较为简单的启发式来解决运算问题，即“如果是加法，就接受较大的结果”和“如果是减法，就接受较小的结果”，且这一解释不涉及数字的空间表征过程(Dunn et al., 2019; McCrink & Wynn, 2009)。McCrink 和 Wynn (2009)开展了一项针对 9 个月大婴儿的研究，他们给婴儿观看物体数量相加(第二组点阵加入第一组点阵)或相减(第二组点阵从第一组点阵中离开)的视频，分别对应正确数量、稍小数量和稍大数量这三种结果。结果发现，婴儿在那些违反运算动量效应的结果上，即在两组数量相加时对稍小数量结果及在两组数量相减时对稍大数量结果的注视时间更久，因而证明在婴儿期就已存在运算动量效应。

另外，有研究进一步考察了启发式对高估加法结果这一运算偏差的影响。例如，Charras 等人(2014)的研究发现，当运算数字重复时(如 24+24)，加法运算的结果会偏向于被低估，而当数字不相同时(如 22+26)则偏向于被高估。Charras 等人(2012, 2014)认为，在运算时加工重复数字和不同数字时所产生的不同运算偏差是由结合认知成本和近似大小表征之间的启发式所解释的。具体而言，启发式有助于个体对相同刺激的表征进行加工，当进行加法运算时，需运算的数字会被映射到内部大小表征中，期间会触发各种错误，而当数字重复时，该映射过程只进行一次，这不仅减少潜在错误的风险，也使得编码过程的所需时间最小化，因而出现低估结果(Charras et al., 2012; Charras et al., 2014; Gallistel & Gelman, 1992)。值得注意的是，这种与认知处理加工成本有关的直觉逻辑在成人中只在进行近似数量表征时才起作用，这是因为在对相对较小的数字进行运算估计时并没有出现由不同和相同数字运算所带来的不同运算偏差(Charras et al., 2014)。

2.3　压缩解释(compression account)

根据行为学与神经科学等方面的研究以及韦伯−费希纳定律，心理数字线是呈对数压缩的，即

相邻数字之间的表征随数值大小成比例地增加(Dehaene & Changeux, 1993; Izard & Dehaene, 2008; Nieder & Miller, 2003; Piazza et al., 2010)。压缩解释认为运算动量效应可能是在已压缩的数字线上运算加减法时所进行的必要的压缩和解压缩过程的结果。具体而言，运算数字首先在心理数字线上被表征为该数字的压缩对数，然而由于在进行运算前对数的转换未充分完成，即运算数字未被解压为对应的线性度量，这导致个体在未充分解压运算数字的基础上对两个数字进行相加或相减运算，使得一个小的压缩偏差可能会不断持续，因此生成的结果分别对应于加法和减法的极端高估和低估，导致运算动量效应的出现。相反地，如果解压精确，生成的结果则基本对应算术上正确的结果。

需注意的是，近期儿童发展的研究结果并不能支持压缩解释，其证据主要有四点：一是在进行运算估计时，学龄前儿童在“±1”的运算任务中出现了经典运算动量效应，但在“±5 或 6”的运算任务中却没有出现该效应。根据压缩解释，个体对更大数字(±5 或 6)的压缩偏差应该大于对稍小数字(±1)的压缩偏差，进而产生更大的运算偏差效应，但研究结果却相反，这表明可能是其他因素影响了实验结果而非对运算数量进行压缩带来的偏差造成(Haman & Lipowska, 2021)。同样地，儿童在进行“+0” (如 4+0)的运算所出现的运算动量效应要大于在进行“+1” (如 3+1)的运算，该现象也无法用压缩理论解释(Pinhas & Fischer, 2008; Shaki et al., 2018)。二是在干预研究中，研究者发现对特定数字线进行线性训练可以显著提高对心理数字线的精确表征，但却对运算动量效应没有影响(Kucian et al., 2011)。其三, Knops 等人(2013)的研究也对压缩解说提出了质疑，其指出如果压缩解释成立，儿童在进行非符号运算时应出现更多的运算动量效应，因为儿童对数字的表征更加偏向其对数表征(Berteletti et al., 2012; Siegler & Opfer, 2003)，然而该研究却发现 6~7 岁儿童在减法运算中出现反向运算动量效应，即相比于加法，儿童在减法运算中出现高估偏差。最后，根据压缩解释，随着年龄增长，个体在运算时所出现的压缩误差应该会减小，进而降低运算动量效应，然而却有研究发现运算动量效应随着个体年龄以及数学能力的增加而增加(Jang & Cho, 2022; Pinheiro-Chagas et al., 2018)。因此，目前压缩解释尚停留在理论阶段，仍需更多的实证研究对该理论解释进行验证。

2.4 多种解释机制的共同作用

随着更多证据的出现，运算动量效应可能无法使用单一机制进行解释，而是由多种理论解释机制共同作用所形成(McCrink & Hubbard, 2017; Shaki et al., 2018)。例如，有学者提出运算动量效应可能是启发式解释与注意转移假说共同作用的结果，且个体受到启发式影响的程度与空间注意力在心理数字线上的分配比例有关(Didino et al., 2019; McCrink & Hubbard, 2017)。McCrink 和 Hubbard (2017)的研究要求参与者在进行非符号运算的同时需处理另一个与运算无关的空间或非空间任务，以降低其用于处理非符号运算的注意力。结果发现，注意力的减少会导致参与者运算动量效应的增加，且在加法运算中尤为明显。这可能是因为当个体分配给非符号运算任务的注意力降低时，更多地使用启发式来进行运算，而加法运算中运算动量效应的明显增加可能是由于加法运算更容易引起空间注意力在心理数字线上的位移偏差(McCrink & Hubbard, 2017)。

此外，Shaki 等人(2018)提出了算术启发式与偏差模型(arithmetic heuristics and biases, AHAB)，该模型认为运算动量效应至少存在三种不同且相互竞争的数字认知机制，即“或多或少”启发式(more-or-less heuristic)、符号−空间联想(sign-space association)以及锚定偏差(anchoring bias)。其中，“或多或少”启发式指的是一种“加法产生较大的结果，减法产生较小的结果”的普遍日常生活经验(McCrink & Wynn, 2009)；符号−空间联想基于“加法对应右侧空间，减法对应左侧空间”的关联(Hartmann et al., 2015; Pinhas & Fischer, 2008; Pinhas et al., 2014)；锚定偏差则反映了“如果两个运算结果相一致，那么减法运算的第一个数字必须大于加法运算”的现象(Shaki et al., 2018)。该模型不仅关注了空间对运算动量效应及数字表征的影响，且认为三者之间可能存在一定联系(Fischer et al., 2018)。例如，有研究发现，非零运算中(即当加数大于零时)会出现反向运算动量效应，这可以通过个体受到第一个数字的锚定偏差的影响大于启发式的影响来解释，然而在零运算中(即当加数为零时运算时)由于存在零而使得锚定偏差在加减法上的作用一致，进而表现为正常的运算动

量效应(Shaki et al., 2018)。

3　运算动量效应的发展性预测因素

早期的基本运算能力对儿童理解更复杂的数学概念和运算具有重要作用(Barth et al., 2005; Feigenson et al., 2004; Gilmore et al., 2007; Spelke, 2017), 同时也是未来学术成就的重要预测因子(Duncan et al., 2007)。过往研究表明, 婴儿和儿童不仅可以表征客体数量, 也可以使用点阵等非符号刺激材料进行基本的加减法估算(Gilmore et al., 2007; McCrink & Wynn, 2004)。因此, 探讨运算动量效应这一运算偏差在儿童发展中的规律和预测因素具有一定的必要性。尽管有关运算动量效应的研究在成人样本中结果较为一致, 但目前聚焦于儿童运算动量效应形成及发展的研究仍较为有限, 且结果预示的发展规律并未有一致的结论。因此, 以下将对运算动量效应的发展性研究进行梳理, 以揭示运算动量效应的发展轨迹, 并进一步在整合现有发展证据的基础上探讨各预测因素对运算动量效应发展的影响。

3.1　运算动量效应的发展轨迹

3.1.1　婴儿期

运算动量效应在婴儿期就已出现(Cassia et al., 2016, 2017; McCrink & Wynn, 2009)。鉴于年纪较小的婴儿无法进行真正意义上的算术运算, 研究者通过使用量级排序(magnitude ordering)任务来测量婴儿对数量变化的估计是否存在高估“加法”(递增序列)而低估“减法”(递减序列)的现象。Cassia 等人(2017)发现 4 个月大的婴儿在注视递增序列时会对某一给定序列位置的点阵预期比实际更多的点阵数量, 而在注视递减序列时则会对某一给定序列位置的点阵预期比实际更少的点阵数量, 这表明婴儿在表征量级序列时就已经出现了对增多和减少的预测偏差, 即高估递增序列中的下一个点阵数量而低估递减序列中的下一个点阵数量, 相同的实验结果也出现在 12 个月大的婴儿身上(Cassia et al., 2016)。此外, 在非符号加减法的基本运算任务中发现, 9 个月大的婴儿就已经表现出了运算动量效应, 即过高地预期两组点数相加的结果, 过低地预期两组点数相减的结果(McCrink & Wynn, 2009)。

3.1.2　儿童期

虽然运算动量效应在婴儿期就已出现, 但目前聚焦于学龄前到学龄期儿童的研究结果却并不一致。具体表现在, 3~5 岁儿童中运算动量效应的出现与个体计数原理的掌握有关(Haman & Lipowska, 2021), 而在 6~7 岁儿童的研究中却发现了反向的运算动量效应(Knops et al., 2013), 但又在 7~8 岁儿童中发现了正向的运算动量效应(Jang & Cho, 2022)。随着年龄的继续增长, 研究者在 9~12 岁儿童群体中也发现了与成人研究一致的运算动量效应(但 8 岁儿童中并没有), 且其效应程度随年龄增大而增强(Pinheiro-Chagas et al., 2018)。有研究者对儿童期运算动量效应的发展模式进行解释, 指出婴儿期到儿童期运算动量效应的非连续性变化可能与任务对注意力资源调动的强度有关: 婴儿研究主要基于眼动时长的测量, 且婴儿只需要对现有的点阵进行判断, 而大多数儿童期的实验需要儿童在两个或两个以上的点阵选项中进行选择, 且儿童需要通过语言或按键来进行回答, 这样的信息处理加工过程可能占用了儿童更多的认知资源, 因此为研究者比较运算动量效应的发展连续性造成了一定的困难(Jang & Cho, 2022)。

3.2　儿童运算动量效应的发展性预测因素

运算动量效应在学龄前到学龄期这种类似“U”型的发展趋势可能与多种因素有关。例如, 这可能与儿童在这一时期开始习得数学知识有关, 包括开始掌握计数原理, 认识和理解运算种类等(Haman & Lipowska, 2021; Jang & Cho, 2022); 同时, 也可能与自身大脑功能的发育而带来的执行功能成熟有关, 即更好的对空间注意力的控制可能带来在心理数字线上更准确的移动(Dunn et al., 2019)。

3.2.1　个体数学能力的提高

数学能力指个体获取、处理和保留数学信息的能力, 或是作为学习和掌握新的数学思想和技能的能力(Karsenty, 2020; Koshy et al., 2009; Vilkomir & O’Donoghue, 2009)。已有研究指出, 在婴儿中就已经存在运算动量效应(Cassia et al., 2016, 2017), 这可能反映了个体天生的数学直觉。随着数学知识的习得, 学龄前儿童的数学能力得到提高, 开始运用计数原理以及其他数学概念对数量变化进行估计和运算。因此, 该年龄段的儿童对数的概念有了明显的认识和发展, 从 2 岁左右开始背诵数字到 3 岁左右可以对应物体进行数

数，再到 4~5 岁可以按数取物并掌握数的其他概念(Wynn, 1992)，且儿童在计数原理的发展和形成过程中存在一定个体差异(Dowker, 2008)，这或许可以解释该阶段儿童的运算动量效应方向性与婴儿期不一致的现象。

近期有研究者对 3~5 岁儿童的运算动量效应展开研究，首次为该年龄段提供了发展证据(Haman & Lipowska, 2021)。该研究测量了学龄前儿童在空间方向性和运算方向性的运算动量效应，并分析了计数原理的掌握与运算动量效应之间的关系。结果发现，计数原理的掌握显著影响运算方向上的运算动量效应，只有完全掌握计数原理的儿童在“±1”的运算任务中出现了高估加法结果而低估减法结果的经典运算动量效应；而在空间方向性的运算动量测试中，即使是未完全掌握计数原理的儿童也出现了数量增多或减少对应向右或向左的方向性偏差。这表明儿童在空间方向性上的运算动量效应早于运算方向性上的运算动量效应，运算方向性的运算动量效应在学龄前阶段受到数学知识的影响，只有掌握了计数原理中后继数和前继数概念(即在一组数量中增加或减少其中一个物体可以改变总数的概念)的儿童才能在估计数量加一或减一时出现经典运算动量效应。同时，研究发现儿童在符号任务中出现经典运算动量效应的年龄要晚于在非符号任务中(Pinhas & Fischer, 2008)，这一发展差异可能是由于符号任务需要儿童对抽象化符号所表明的数字含义有一定的认识和理解，需要对于数学知识的掌握。另一方面，有研究指出，运算动量效应的增强与个体符号运算能力相关联，同时还可能反映出个体在进行算数运算时更强的直觉能力以及算术运算的基础知识(Jang & Cho, 2022)。

3.2.2 个体空间注意力的成熟

除了数学能力的提高之外，影响运算动量效应的出现与否及其方向性的另一个重要预测因素在于空间注意力的成熟及其将注意力映射到心理数字线上的控制力。这反映在学龄前及小学低年级儿童在估计非符号运算的结果时，如果运算中的第二个加数或减数比较大(大于 4)，该年龄段儿童通常会高估运算结果，而不论运算种类是加法还是减法(Haman & Lipowska, 2021; Knops et al., 2013)。有趣的是，随着年龄的增加，研究发现 9~12 岁儿童又出现了经典的运算动量效应(Pinheiro-Chagas et al., 2018)。这种运算动量效应的发展性变化可由注意转移假说解释，成熟的注意系统对非符号运算任务中的运算动量效应起着关键作用，因此个体视觉空间及注意力的成熟度可能是影响运算动量效应的重要因素，随着个体年龄的增长而对运算动量效应产生影响。

同时，Dunn 等人(2019)在对比学前儿童和成年人的运算动量效应后也提供了支持性证据。在该实验中，研究者分别给参与者先后呈现三次同样数量的点阵(即有序条件，如 56, 56, 56)以及三个递增翻倍数值的点阵(即无序条件，如 7, 14, 28)，且要求其判断并选择下一个点阵。结果发现，相比于学前儿童，成人更倾向于在无序条件下高估升序序列的下一个点阵数量。这可能与个体空间注意网络的成熟度有关，随着年龄增长个体在运算进行过程中的空间注意沿心理数字线移动的能力也会变化，9~12 岁可能是空间注意网络足够成熟并映射到心理数字线的转折阶段，且随年龄增长的心理长度也可能影响儿童数字线的估计表征(曹碧华 等, 2021)。此外，该研究还发现学前儿童表现出的空间偏差比运算偏差更为明显，这表明运算动量效应的大小和方向性可能并非受空间注意系统单独影响，而是视觉空间注意本身的成熟度和空间注意在心理数字线上转移程度的共同作用(Dunn et al., 2019)。

4 未来研究展望

尽管已有越来越多的研究者开始关注儿童发展中的运算动量效应，但其形成的理论解释、预测因素及其发展轨迹尚在探索之中，且目前该领域的研究依然存在一定不足，需要在未来研究中加以丰富、探索与改善。

4.1 整合研究任务以探究运算动量效应在各年龄阶段的发展趋势

尽管运算动量效应在婴儿时期就已出现，且在成人中得到较为一致的实证结论，但由于儿童发展不同时期的发展特点与发展变化各异，所得的实验结论并不一致(曾婷, 2020)。这可能与任务类型(使用符号或非符号刺激材料)、调配认知资源的多少以及是否涉及其他数学知识等有关，同时目前研究也尚未直接测量过运算动量效应的发展轨迹。基于此，尽管以往研究在婴儿和成年人中发现了运算动量效应的出现，但运算动量的内在

机制可能因不同发展阶段而各不相同(Dunn et al., 2019)。同时, 运算任务也对运算动量效应有着不同影响, 这可能与个体对不同运算种类的熟悉程度及运算能力有关, 如以往研究发现个体在加法和减法中所出现的运算动量大小并不一致(Knops, Viarouge, & Dehaene, 2009)。因此, 未来需要在各年龄阶段中开展关于运算动量效应的研究, 采用一致的研究任务考察不同运算种类, 以帮助研究者进行不同年龄儿童运算偏差效应的直接比较, 同时开展多时间点或多年龄段的纵向研究来更完整地考察运算偏差效应的发展趋势, 还可以参考婴儿和儿童的实验范式, 将任务适用于探究低龄儿童(2~ 5 岁)的运算动量效应, 以填补以往研究中童年早期运算动量效应方面的空白。

4.2　考察数量表征系统的成熟与运算动量效应间的关联

近似数量系统(approximate number system, ANS)指的是个体在不依赖逐个计数的情况下, 对一组大于 4 的非符号数量进行近似评估的数量系统(Feigenson et al., 2004; Gallistel, 2011)。当个体在进行非符号运算时, 近似数量系统的敏锐度可能会通过个体的数学能力而进一步影响到运算动量效应。相比于青少年与成人(Knops et al., 2014), 近似数量系统可能是学龄前后儿童获取符号数量意义的基础(Chu et al., 2016; van Marle et al., 2014), 它不仅能够预测个体数学能力(曹贤才 等, 2016; 牛玉柏 等, 2018; Au et al., 2018; Chen & Li, 2014; Elliott et al., 2019; He et al., 2016; Lindskog et al., 2021; Park et al., 2016; Szkudlarek & Brannon, 2018), 也可能是导致该阶段儿童数学能力产生个体差异的主要原因之一(Chu et al., 2016; Rittle-Johnson et al., 2017)。另外, 近似数量系统的符号与非符号估计对学前儿童及小学儿童的数学技能有着不同作用, 具体表现为非符号估计与学前儿童的数学能力间有独特关联, 可以预测学前儿童的早期数学技能、数值运算、数学问题解决及运算流畅性, 而符号估计则与小学儿童的数学能力间有独特关联, 可以预测小学儿童的数学问题能力及数值运算(Cai et al., 2018)。因此, 当个体面临符号或非符号刺激进行估计运算时, 可能会通过近似数量系统影响个体的数学能力, 进而导致运算动量效应的出现, 并且可能随年龄增长而影响运算动量效应的大小或方向(梁笑 等, 2021)。此外, 幼儿的近似数量系统敏锐度与父母的近似数量系统敏锐度之间存在正相关, 这表明近似数量系统可能存在代际传递, 使得个体差异表现在个体发展的早期阶段(Navarro et al., 2018; Odic & Starr, 2018)。未来研究可以考察近似数量系统的敏锐度及运算估计的精确度在不同发展阶段对运算动量效应的影响, 主要包括运算动量效应在学龄前儿童中的出现是否与近似数量系统的敏锐度有关, 以及学龄儿童使用近似数量系统进行运算的精确度是否影响运算动量效应的强度等。

4.3　探究运算动量效应在不同运算符号中的稳定性

目前基于非符号运算所开展的运算动量效应研究基本均聚焦于加减法所展开(Knops, Viarouge, & Dehaene, 2009; Knops et al., 2014; McCrink et al., 2007), 鲜有研究探查更复杂的运算种类, 如乘法、除法、对数、分数、初级代数(如反向运算问题: $2+x=8$)等。然而, 在对非符号材料进行运算的研究中, 发现学龄前及低年级小学儿童可以对离散(点阵)和连续(线段)的非符号刺激进行加倍或减半的运算操作, 甚至可以进行翻 4 倍或是乘以较小的数的运算(Barth et al., 2009; Qu et al., 2021; Szkudlarek & Brannon, 2021), 这支持了除基本的加减运算外, 个体在面对非符号刺激时也拥有进行乘除运算的估计能力。目前已有研究考察了成人对符号(数字)和非符号(点阵)进行乘法和除法运算时的运算偏差, 结果发现非符号乘法题的结果会被高估, 而除法题则会被低估, 即在非符号乘法和除法中存在运算动量效应(Katz & Knops, 2014)。但同时也有研究发现, 在乘法题中未出现明显的高估现象, 却在除法中存在高估现象, 并认为这可能是由启发式(即“乘法变大, 除法变小”的直觉)或锚定偏差(即对相同的运算结果, 除法中的第一个数字平均会大于乘法中的第一个数字)所导致(Shaki & Fischer, 2017)。此外, 反向运算问题可以在未接触方程之前就被儿童通过近似数量系统所解答, 但仅限于非符号运算中, 而在进行写或说的数字符号运算时均无法解决此类数学问题(Kibbe & Feigenson, 2015)。同时, 相比于个位数的加减法, 多位数计算需要基本的数学知识以及数学计算策略, 如进位制等(Nuerk et al., 2011)。例如, 在多位数无进位问题(如 24+53)和零问题(如 24+0)中, 加法所估结果大于减法所估结果,

但在多位数进位问题中则不存在该情况，这表示运算动量效应可能在进位问题中存在不同的作用机制(Lindemann & Tira, 2015)。基于此，在加减法之外的复杂运算中也可能存在运算动量效应，未来可开展不同运算种类下有关运算动量效应的研究，以助于进一步探讨运算动量效应的具体表现形式与稳定性。

4.4 考察不同因素在运算动量效应中的共同作用

近年来有研究者认为，运算动量效应可能受到变量间共同作用的影响，如数学能力、视觉空间能力和注意力过程的成熟度等(Cheng & Mix, 2014; Gunderson et al., 2012; Kucian et al., 2013; Thompson et al., 2013)。例如，有研究针对发展性计算障碍儿童(developmental dyscalculia, 即缺少对数概念的理解且在视觉空间注意和注意力功能上均有一定缺陷的儿童)的运算动量效应进行了考察。该研究发现，在发展性计算障碍儿童身上并不存在运算动量效应，这表明运算动量效应的产生需要个体对数学运算的原理有一定理解且有意识地将空间注意力在心理数字线上进行转移(Kucian et al., 2013)。因此，从空间注意和个体数学能力的角度出发，空间能力与数学能力间的关联可能会共同影响运算动量效应。其中，空间能力是指一种产生、检索、保留和处理符号信息和非语言信息的能力，如形状、位置等(Hegarty & Waller, 2005; Linn & Petersen, 1985; McGrew, 2009)，包括动态空间能力与静态空间能力，前者可以进行转换或移动，如心理旋转(在心理上旋转二维或三维物体的能力)，后者则用于理解抽象空间的能力(Mix & Cheng, 2012; Uttal et al., 2013)。Tam 等人(2019)的研究考察了空间能力与数学能力之间的关系，结果表明二者之间存在正相关，且心理数字线表征在空间能力与计算能力及应用题解决能力的关系中起完全中介作用，体现了心理数字线的重要作用。除此以外，亦有不少研究发现数学能力与空间能力之间存在一定关联(Frick, 2019; Mix et al., 2016; Zhang et al., 2017)。然而，该关联并不是简单的线性关系，具体而言，逻辑推理能力与空间能力间的关联要强于数字或运算能力与空间能力的关联，且空间能力和视觉−空间记忆与数学能力均有一定程度的关联(Xie et al., 2020)。基于此，个体不同的数学能力可能会通过与空间能力关联的路径进而影响到个体在心理数字线上的空间表征，最终作用于运算动量效应，未来可针对不同因素之间的共同作用开展研究，进一步探讨运算动量效应的潜在形成机制。

4.5 设计有关数学能力的干预措施

已有研究发现，近似数量系统与个体的数学能力之间存在一定联系，接受近似运算训练的个体在符号运算方面具有显著提高，且近似数量系统的敏锐度对后期运算能力有显著影响(Elliott et al., 2019; He et al., 2016; Park & Brannon, 2013; Szkudlarek & Brannon, 2017)。同时，相比于非符号数字比较任务、视觉−空间短期记忆任务或数字排序训练任务，非符号的近似运算训练对提高个体符号运算流畅性更具积极作用，但也有研究并未发现这一结果(Park & Brannon, 2014; Szkudlarek et al., 2021)。个体近似数量系统的精确度具有一定动态性，儿童的近似数字表现可能受到直接经验的影响，当任务难度从较简单逐渐发展到较困难时，个体的近似数量系统会更为精确，进而通过这种短暂调整来促进个体的数学能力，从而影响儿童在后续近似数量任务中的表现(Wang et al., 2016; Wang et al., 2018; Wang et al., 2021)。这提示未来可以通过近似算数训练对个体的近似数量系统进行干预，逐步调整任务难度以改善儿童的数学能力，从而达到影响运算偏差及运算动量效应的效果。此外，针对工作记忆元分析的研究表明，工作记忆训练可能有效改善数感，其主要针对存储系统或中央执行系统的训练，包括语音回路(phonological loop)、视空模板(visuospatial sketchpad)、转换(shifting process)、刷新(updating)和抑制(inhibition)成分，分为针对单一系统的训练及针对多种系统的同时训练这两类，例如分类工作记忆广度任务(categorization working memory span task, CWMS)、N-back 任务、Cogmed 工作记忆训练(cogmed working memory training, CWMT)等(郭丽月 等, 2018)，这可能可以帮助个体通过对数感的改善来进一步减少运算偏差及运算动量效应的影响。因此，未来研究可继续考察不同干预措施的有效性并充分利用，进而改善个体的运算偏差及运算动量效应。

参考文献

曹碧华, 曾春雲, 廖虹, 李富洪. (2021). 心理长度对二年级儿童数字线估计表征的影响. *心理发展与教育*, *37*(2),

190–198.

曹贤才, 时冉冉, 牛玉柏. (2016). 近似数量系统敏锐度与数学能力的关系. *心理科学, 39*(3), 580–586.

戴隆农, 潘运. (2021). 数字-空间联结的内在机制: 基于工作记忆的视角. *心理科学, 44*(4), 793–799.

郭丽月, 严超, 邓赐平. (2018). 数学能力的改善: 针对工作记忆训练的元分析. *心理科学进展, 26*(9), 1576–1589.

李红霞, 司继伟, 陈泽建, 张堂正. (2015). 人类的近似数量系统. *心理科学进展, 23*(4), 562–570.

梁笑, 康静梅, 王丽娟. (2021). 个体近似数量系统与其数学能力之间的关系: 发展研究的证据. *心理科学进展, 29*(5), 827–837.

牛玉柏, 张丽芬, 肖帅, 曹贤才. (2018). 小学生近似数量系统敏锐度的发展趋势及其与数学能力的关系: 抑制控制的中介作用. *心理科学, 41*(2), 344–350.

潘运, 戴隆农, 赵竹君, 陈衍, 陈加, 赵守盈. (2019). 正负数混合呈现对负数 SNARC 效应的影响. *心理科学, 42*(5), 1083–1090.

曾婷. (2020). *4-6 岁儿童词汇、空间能力、执行功能与数学能力的关系研究* (硕士学位论文). 湖南师范大学.

Au, J., Jaeggi, S. M., & Buschkuehl, M. (2018). Effects of non-symbolic arithmetic training on symbolic arithmetic and the approximate number system. *Acta Psychologica, 185*, 1–12.

Barth, H., Baron, A., Spelke, E., & Carey, S. (2009). Children's multiplicative transformations of discrete and continuous quantities. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*(4), 441–454.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., Dehaene, S., Kanwisher, N., & Spelke, E. (2006). Non-symbolic arithmetic in adults and young children. *Cognition, 98*(3), 199–222.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., & Spelke, E. S. (2005). Abstract number and arithmetic in preschool children. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 102*(39), 14116–14121.

Berteletti, I., Lucangeli, D., & Zorzi, M. (2012). Representation of numerical and non-numerical order in children. *Cognition, 124*(3), 304–313.

Bonato, M., D'Ovidio, U., Fias, W., & Zorzi, M. (2021). A momentum effect in temporal arithmetic. *Cognition, 206*, 104488.

Cai, D., Zhang, L., Li, Y., Wei, W., & Georgiou, G. K. (2018). The role of approximate number system in different mathematics skills across grades. *Frontiers in Psychology, 9*, 1733.

Cantlon, J. F., & Brannon, E. M. (2007). Basic math in monkeys and college students. *PLoS Biology, 5*(12), e328.

Cassia, V. M., Bulf, H., McCrink, K., & de Hevia, M. D. (2017). Operational momentum during ordering operations for size and number in 4-month-old infants. *Journal of Numerical Cognition, 3*(2), 270–287.

Cassia, V. M., McCrink, K., de Hevia, M. D., Gariboldi, V., & Bulf, H. (2016). Operational momentum and size ordering in preverbal infants. *Psychological Research, 80*(3), 360–367.

Charras, P., Brod, G., & Lupiáñez, J. (2012). Is 26+26 smaller than 24+28? Estimating the approximate magnitude of repeated versus different numbers. *Attention, Perception, & Psychophysics, 74*(1), 163–173.

Charras, P., Molina, E., & Lupiáñez, J. (2014). Additions are biased by operands: Evidence from repeated versus different operands. *Psychological Research, 78*(2), 248–265.

Chen, Q., & Li, J. (2014). Association between individual differences in non-symbolic number acuity and math performance: A meta-analysis. *Acta Psychologica, 148*, 163–172.

Cheng, Y. L., & Mix, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development, 15*(1), 2–11.

Chu, F. W., vanMarle, K., & Geary, D. C. (2016). Predicting children's reading and mathematics achievement from early quantitative knowledge and domain-general cognitive abilities. *Frontiers in Psychology, 7*, 775.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44*(1–2), 1–42.

Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General, 122*(3), 371–396.

Dehaene, S., & Changeux, J. P. (1993). Development of elementary numerical abilities: A neuronal model. *Journal of Cognitive Neuroscience, 5*(4), 390–407.

Didino, D., Pinheiro-Chagas, P., Wood, G., & Knops, A. (2019). Response: Commentary: The developmental trajectory of the operational momentum effect. *Frontiers in Psychology, 10*, 160.

Dowker, A. (2008). Individual differences in numerical abilities in preschoolers. *Developmental Science, 11*(5), 650–654.

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., ... Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology, 43*(6), 1428–1446.

Dunn, H., Bernstein, N., de Hevia, M. D., Cassia, V. M., Bulf, H., & McCrink, K. (2019). Operational momentum for magnitude ordering in preschool children and adults. *Journal of Experimental Child Psychology, 179*, 260–275.

Elliott, L., Feigenson, L., Halberda, J., & Libertus, M. E. (2019). Bidirectional, longitudinal associations between math ability and approximate number system precision in childhood. *Journal of Cognition and Development, 20*(1), 56–74.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences, 8*(7), 307–314.

Fischer, M. H., Miklashevsky, A., & Shaki, S. (2018). Commentary: The developmental trajectory of the operational momentum effect. *Frontiers in Psychology, 9*, 2259.

Freyd, J. J., & Finke, R. A. (1984). Representational momentum. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 10*(1), 126–132.

Frick, A. (2019). Spatial transformation abilities and their relation to later mathematics performance. *Psychological Research, 83*(7), 1465–1484.

Gallistel, C. R. (2011). Prelinguistic thought. *Language

Learning and Development, 7(4), 253–262.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition, 44*(1–2), 43–74.

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature, 447*(7144), 589–591.

Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L., & Levine, S. C. (2012). The relation between spatial skill and early number knowledge: The role of the linear number line. *Developmental Psychology, 48*(5), 1229–1241.

Haman, M., & Lipowska, K. (2021). Moving attention along the mental number line in preschool age: Study of the operational momentum in 3- to 5-year-old children's non-symbolic arithmetic. *Developmental Science, 24*(1), e13007.

Hartmann, M., Mast, F. W., & Fischer, M. H. (2015). Spatial biases during mental arithmetic: Evidence from eye movements on a blank screen. *Frontiers in Psychology, 6*, 12.

He, Y., Zhou, X., Shi, D., Song, H., Zhang, H., & Shi, J. (2016). New evidence on causal relationship between approximate number system (ANS) acuity and arithmetic ability in elementary-school students: A longitudinal cross-lagged analysis. *Frontiers in Psychology, 7*, 1052.

Hegarty, M., & Waller, D. (2005). Individual differences in spatial abilities. In P. Shah, & A. Miake (Eds.). *The Cambridge handbook of visuospatial thinking* (pp. 121–169). Cambridge University Press.

Hubbard, T. L. (2014). Forms of momentum across space: Representational, operational, and attentional. *Psychonomic Bulletin & Review, 21*, 1371–1403.

Hubbard, T. L. (2015). The varieties of momentum-like experience. *Psychological Bulletin, 141*(6), 1081–1119.

Izard, V., & Dehaene, S. (2008). Calibrating the mental number line. *Cognition, 106*(3), 1221–1247.

Jang, S., & Cho, S. (2022). Operational momentum during children’s approximate arithmetic relates to symbolic math skills and space–magnitude association. *Journal of Experimental Child Psychology, 213*, 105253.

Karsenty, R. (2020). Mathematical ability. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 494–497.

Katz, C., & Knops, A. (2014). Operational momentum in multiplication and division? *PLoS One, 9*(8), e104777.

Kibbe, M. M., & Feigenson, L. (2015). Young children ‘solve for x’ using the approximate number system. *Developmental Science, 18*(1), 38–49.

Klein, E., Huber, S., Nuerk, H. C., & Moeller, K. (2014). Operational momentum affects eye fixation behaviour. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 67*(8), 1614–1625.

Knops, A., Dehaene, S., Berteletti, I., & Zorzi, M. (2014). Can approximate mental calculation account for operational momentum in addition and subtraction? *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 67*(8), 1541–1556.

Knops, A., Thirion, B., Hubbard, E. M., Michel, V., & Dehaene, S. (2009). Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic. *Science, 324*(5934), 1583–1585.

Knops, A., Viarouge, A., & Dehaene, S. (2009). Dynamic representations underlying symbolic and nonsymbolic calculation: Evidence from the operational momentum effect. *Attention, Perception, & Psychophysics, 71*(4), 803–821.

Knops, A., Zitzmann, S., & McCrink, K. (2013). Examining the presence and determinants of operational momentum in childhood. *Frontiers in Psychology, 4*, 325.

Koshy, V., Ernest, P., & Casey, R. (2009). Mathematically gifted and talented learners: Theory and practice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(2), 213–228.

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., ... von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage, 57*(3), 782–795.

Kucian, K., Plangger, F., O'Gorman, R., & von Aster, M. (2013). Operational momentum effect in children with and without developmental dyscalculia. *Frontiers in Psychology, 4*, 847.

Lindemann, O., & Tira, M. D. (2015). Operational momentum in numerosity production judgments of multi-digit number problems. *Zeitschrift für Psychologie / Journal of Psychology, 219*(1), 50–57.

Lindskog, M., Poom, L., & Winman, A. (2021). Attentional bias induced by stimulus control (ABC) impairs measures of the approximate number system. *Attention, Perception, & Psychophysics, 83*(4), 1684–1698.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development, 56*(6), 1479–1498.

Liu, D., Cai, D., Verguts, T., & Chen, Q. (2017). The time course of spatial attention shifts in elementary arithmetic. *Scientific Reports, 7*(1), 921.

Masson, N., Letesson, C., & Pesenti, M. (2018). Time course of overt attentional shifts in mental arithmetic: Evidence from gaze metrics. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 71*(4), 1009–1019.

Masson, N., & Pesenti, M. (2016). Interference of lateralized distractors on arithmetic problem solving: A functional role for attention shifts in mental calculation. *Psychological Research, 80*(4), 640–651.

McCrink, K., Dehaene, S., & Dehaene-Lambertz, G. (2007). Moving along the number line: Operational momentum in nonsymbolic arithmetic. *Perception & Psychophysics, 69*(8), 1324–1333.

McCrink, K., & Hubbard, T. (2017). Dividing attention increases operational momentum. *Journal of Numerical Cognition, 3*(2), 230–245.

McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science, 15*(11), 776–781.

McCrink, K., & Wynn, K. (2009). Operational momentum in large-number addition and subtraction by 9-month-olds. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*(4), 400–408.

McGrew, K. S. (2009). CHC theory and the human cognitive abilities project: Standing on the shoulders of the giants of psychometric intelligence research. *Intelligence, 37*(1), 1–10.

Mix, K. S., & Cheng, Y. L. (2012). The relation between space and math: Developmental and educational implications. In J. B. Benson (Ed.). *Advances in child development and behavior* (pp. 197–243). Elsevier Academic Press.

Mix, K. S., Levine, S. C., Cheng, Y. L., Young, C., Hambrick, D. Z., Ping, R., & Konstantopoulos S. (2016). Separate but correlated: The latent structure of space and mathematics across development. *Journal of Experimental Psychology: General, 145*(9), 1206–1227.

Navarro, M. G., Braham, E. J., & Libertus, M. E. (2018). Intergenerational associations of the approximate number system in toddlers and their parents. *British Journal of Developmental Psychology, 36*(4), 521–539.

Nieder, A., & Miller, E. K. (2003). Coding of cognitive magnitude: Compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex. *Neuron, 37*(1), 149–157.

Nuerk, H. C., Moeller, K., Klein, E., Willmes, K., & Fischer, M. H. (2011). Extending the mental number line: A review of multi-digit number processing. *Zeitschrift für Psychologie / Journal of Psychology, 219*(1), 3–22.

Odic, D., & Starr, A. (2018). An introduction to the approximate number system. *Child Development Perspectives, 12*(4), 223–229.

Park, J., Bermudez, V., Roberts, R. C., & Brannon, E. M. (2016). Non-symbolic approximate arithmetic training improves math performance in preschoolers. *Journal of Experimental Child Psychology, 152*, 278–293.

Park, J., & Brannon, E. M. (2013). Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological Science, 24*(10), 2013–2019.

Park, J., & Brannon, E. M. (2014). Improving arithmetic performance with number sense training: An investigation of underlying mechanism. *Cognition, 133*(1), 188–200.

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., ... Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition, 116*(1), 33–41.

Pinhas, M., & Fischer, M. H. (2008). Mental movements without magnitude? A study of spatial biases in symbolic arithmetic. *Cognition, 109*(3), 408–415.

Pinhas, M., Shaki, S., & Fischer, M. H. (2014). Heed the signs: Operation signs have spatial associations. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 67*(8), 1527–1540.

Pinhas, M., Shaki, S., & Fischer, M. H. (2015). Addition goes where the big numbers are: Evidence for a reversed operational momentum effect. *Psychonomic Bulletin & Review, 22*(4), 993–1000.

Pinheiro-Chagas, P., Didino, D., Haase, V. G., Wood, G., & Knops, A. (2018). The developmental trajectory of the operational momentum effect. *Frontiers in Psychology, 9*, 1062.

Qu, C., Szkudlarek, E., & Brannon, E. M. (2021). Approximate multiplication in young children prior to multiplication instruction. *Journal of Experimental Child Psychology, 207*, 105116.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G., & Farran, D. C. (2017). Early math trajectories: Low-income children's mathematics knowledge from ages 4 to 11. *Child Development, 88*(5), 1727–1742.

Shaki, S., & Fischer, M. H. (2017). Competing biases in mental arithmetic: When division is more and multiplication is less. *Frontiers in Human Neuroscience, 11*, 37.

Shaki, S., Pinhas, M., & Fischer, M. H. (2018). Heuristics and biases in mental arithmetic: Revisiting and reversing operational momentum. *Thinking & Reasoning, 24*(2), 138–156.

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science, 14*(3), 237–250.

Spelke, E. S. (2017). Core knowledge, language, and number. *Language Learning and Development, 13*(2), 147–170.

Szkudlarek, E., & Brannon, E. M. (2017). Does the approximate number system serve as a foundation for symbolic mathematics? *Language Learning and Development, 13*(2), 171–190.

Szkudlarek, E., & Brannon, E. M. (2018). Approximate arithmetic training improves informal math performance in low achieving preschoolers. *Frontiers in Psychology, 9*, 606.

Szkudlarek, E., & Brannon, E. M. (2021). First and second graders successfully reason about ratios with both dot arrays and Arabic numerals. *Child Development, 92*(3), 1011–1027.

Szkudlarek, E., Park, J., & Brannon, E. M. (2021). Failure to replicate the benefit of approximate arithmetic training for symbolic arithmetic fluency in adults. *Cognition, 207*, 104521.

Tam, Y. P., Wong, T. T. Y., & Chan, W. W. L. (2019). The relation between spatial skills and mathematical abilities: The mediating role of mental number line representation. *Contemporary Educational Psychology, 56*, 14–24.

Thompson, J. M., Nuerk, H. C., Moeller, K., & Kadosh, R. C. (2013). The link between mental rotation ability and basic numerical representations. *Acta Psychologica, 144*(2), 324–331.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin, 139*(2), 352–402.

van Marle, K., Chu, F. W., Li, Y., & Geary, D. C. (2014). Acuity of the approximate number system and preschoolers' quantitative development. *Developmental Science, 17*(4), 492–505.

Vilkomir, T., & O'Donoghue, J. (2009). Using components of mathematical ability for initial development and identification of mathematically promising students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(2), 183–199.

Wang, J., Halberda, J., & Feigenson, L. (2021). Emergence of the link between the approximate number system and symbolic math ability. *Child Development, 92*(2), e186–e200.

Wang, J. J., Libertus, M. E., & Feigenson, L. (2018). Hysteresis-induced changes in preverbal infants' approximate number precision. *Cognitive Development, 47*, 107–116.

Wang, J. J., Odic, D., Halberda, J., & Feigenson, L. (2016). Changing the precision of preschoolers' approximate number system representations changes their symbolic math performance. *Journal of Experimental Child Psychology, 147*, 82–99.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*(6389), 749–750.

Xie, F., Zhang, L., Chen, X., & Xin, Z. (2020). Is spatial ability related to mathematical ability: A meta-analysis. *Educational Psychology Review, 32*, 113–155.

Zhang, X., Räsänen, P., Koponen, T., Aunola, K., Lerkkanen, M. K., & Nurmi, J. E. (2017). Knowing, applying, and reasoning about arithmetic: Roles of domain-general and numerical skills in multiple domains of arithmetic learning. *Developmental Psychology, 53*(12), 2304–2318.

Zhu, R., Luo, Y., You, X., & Wang, Z. (2018). Spatial bias induced by simple addition and subtraction: From eye movement evidence. *Perception, 47*(2), 143–157.

Zhu, R., You, X., Gan, S., & Wang, J. (2019). Spatial attention shifts in addition and subtraction arithmetic: Evidence of eye movement. *Perception, 48*(9), 835–849.

The theoretical accounts and developmental predictors of operational momentum effect

ZHANG Wen[1,2,3], DONG Qiyiru[1], GONG Lijuan[1], SHANG Qi[1], CHENG Chen[4,5], DING Xuechen[1,6]

([1] *Department of Psychology, Shanghai Normal University, Shanghai* 200234, *China*)

([2] *CAS Key Laboratory of Behavioral Science, Institute of Psychology, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100101, *China*)

([3] *Department of Psychology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

([4] *Department of Psychological and Brain Sciences, Boston University, Boston* 02460, *USA*)

([5] *Division of Social Science, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong* 999077, *China*)

([6] *The Research Base of Online Education for Shanghai Middle and Primary Schools, Shanghai* 200234, *China*)

Abstract: Investigating how operational momentum effect is formed and moderated by developmental factors is critical in understanding the underlying mechanism of arithmetic computation. Early arithmetic is fundamental to acquisition of complex mathematical concepts and advanced arithmetic operations. When performing arithmetic operations, individuals tend to overestimate outcomes in addition and underestimate outcomes in subtraction, such estimation bias is called operational momentum (OM) effect, which includes three main theoretical accounts (i.e., attentional shift account, heuristic account, compression account). Though many studies using various experimental designs have demonstrated the OM effect in adults, it remained puzzled in development as findings in children have shown inconsistent findings. The present review discussed the trajectories and influencing factors of OM effect in early development. Future directions in the developmental field should investigate: 1) the developmental trajectory of OM through integrating multiple paradigms; 2) the role of Approximate Number System plays in the onset and development of OM; 3) generalizability of OM in complex arithmetic or even algebraic operations; 4) the joint effect of various factors (e.g., mathematical abilities and spatial attention) on OM; and 5) intervention for operational bias.

Keywords: operational momentum effect, attentional shift account, heuristic account, compression account